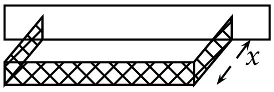
Entraînez-vous pendant les vacances en vous aidant du corrigé disponible sur le site internet du lycée.

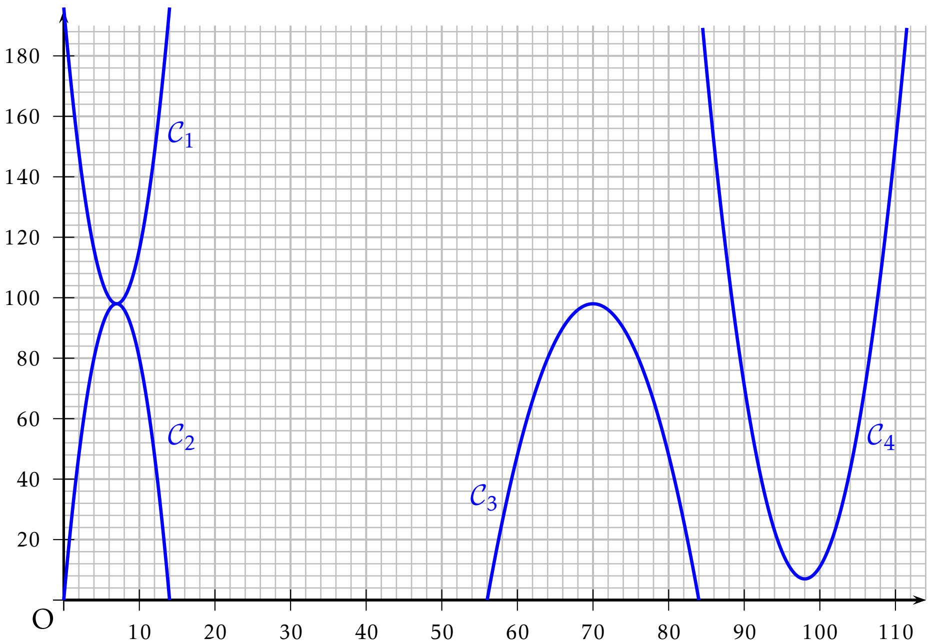
EXERCICE 1 : Trinôme du second degré

Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.
Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.
On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.



On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à un nombre x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction $\mathcal{A}$ est ainsi définie sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.

1. (a) Vérifier que l'aire $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 28x$.
   (b) Montrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $-2(x-7)^2 + 98$.
2. Quatre courbes ont été tracées sur le graphique ci-dessous. Identifier celle qui représente la fonction $\mathcal{A}$.



3. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
4. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner la valeur de cette aire.

EXERCICE 2 : Dérivation

Un médicament contre la douleur est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang, en milligramme par litre de sang, est modélisée par la fonction f qui, au temps écoulé x en heure, x étant compris entre 0 et 6, associe :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x \quad \text{où} \quad x \in [0\,;\,6].$$

Le produit actif est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure ou égale à 5 mg/L.

1. En exécutant le script Python ci-dessous, on obtient la liste [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0].

```
liste=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
for x in range(0,7) :
    if x**3-12*x**2+36*x>=5:
        liste[x]= 1
print(liste)
```

À l'aide de ce résultat, indiquer l'intervalle de temps en unité d'heures sur lequel le médicament est efficace.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$, calculer sa fonction dérivée.

3. Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite $y = -12x + 64$.

4. Démontrer que $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

5. En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T au point A.

EXERCICE 3 : Dérivation

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé en **centaines d'euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5\,;60]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen de production égal à 4 300 € (43 centaines d'euros) ?

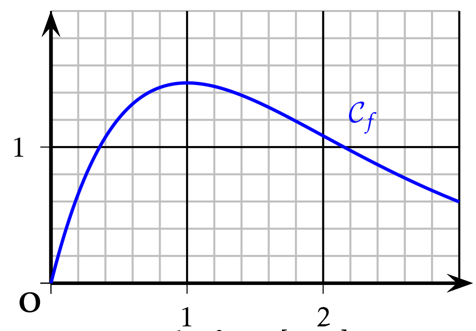
3. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ?

   Déterminer ce coût moyen minimal.

EXERCICE 4 : Fonction exponentielle

Soit la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = 4x\,\text{e}^{-x}$.

1. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'origine **O**.



   Conjecturer une valeur approchée du maximum de f sur $[0\,;3]$.

2. La fonction f est dérivable sur $[0\,;3]$.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, $f'(x) = 4(1-x)\,\text{e}^{-x}$.

3. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0\,;3]$.

4. En déduire le tableau des variations de f sur $[0\,;3]$ puis la valeur exacte du maximum de f sur $[0\,;3]$.

5. Soit A le point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ et soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0,5$.
Qui, de la droite (AO) ou de la droite $\mathcal{T}$, a le plus grand coefficient directeur ? Justifier.

EXERCICE 5 : Suites

Une banque propose un placement. Le compte est rémunéré et rapporte 5 % par an. La banque prend des frais de gestion qui se montent à 12 euros par an.
Ainsi, chaque année la somme sur le compte augmente de 5 % puis la banque prélève 12 euros.
Noémie place la somme de 1 000 euros dans cette banque.
On appelle u_n la somme disponible sur le compte en banque de Noémie après n années, où n désigne un entier naturel.
On a donc $u_0 = 1\,000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,05u_n - 12$

1. Avec un tableur on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) :

   (a) Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B3 avant de l'étirer pour obtenir ces résultats ?

   (b) En utilisant les valeurs calculées de la suite, indiquer à Noémie combien de temps elle doit attendre pour que son placement lui rapporte 20 %.

	A	B
1	n	u(n)
2	0	1 000
3	1	1 038,00
4	2	1 077,90
5	3	1 119,80
6	4	1 163,78
7	5	1 209,97
8	6	1 258,47
9	7	1 309,40
10	8	1 362,87
11	9	1 419,01
12	10	1 477,96

On pose (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 240$.

2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1,05$.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de l'entier n.

4. Calculer à partir de cette dernière formule la somme disponible sur le compte en banque de Noémie après 20 ans de placement.

EXERCICE 6 : Suites

Durant le mois de janvier 2020, une entreprise produit 2 500 flacons de parfum ce qui correspond exactement au nombre de flacons commandés. Le propriétaire de l'entreprise décide d'augmenter chaque mois la production de 108 flacons et il espère que le nombre de flacons commandés augmentera chaque mois de 3,8 %.
On considère la suite (f_n) où pour tout entier naturel n, f_n modélise le nombre de flacons produits lors du mois de rang n après janvier 2020 ; ainsi f_0 est le nombre de flacons produits en janvier 2020, f_1 le nombre de flacons produits en février 2020, etc.
De la même manière, on considère la suite (c_n) où pour tout entier naturel n, c_n modélise le nombre potentiel de flacons commandés lors du mois de de rang n après janvier 2020.
On a donc $f_0 = c_0 = 2\,500$.

1. Déterminer, en expliquant les calculs effectués, le nombre de flacons produits et le nombre potentiel de flacons commandés en février 2020.

2. Déterminer la nature des suites (f_n) et (c_n).

3. Exprimer, pour tout entier n, f_n et c_n en fonction de n.

4. On admet que, selon ce modèle, au bout d'un certain nombre de mois le nombre potentiel de flacons commandés dépassera le nombre de flacons produits.
   Reproduire et compléter sur la copie l'algorithme ci-contre, écrit en Python, afin qu'après son exécution la variable n contienne le nombre de mois à attendre après le mois de janvier 2020 pour que le nombre potentiel de flacons commandés dépasse le nombre de flacons produits.

```
n = 0
f = 2 500
c = 2 500
while ... :
    n = ...
    f = ...
    c = ...
```

5. De début janvier 2020 à fin décembre 2020, la production globale dépassera-t-elle le nombre de commandes potentielles ? Expliquer votre démarche.

<u>EXERCICE 7</u> : Probabilités

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée.
Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime qu'il a :
- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S l'événement « La question est dans la catégorie Sciences » et B l'événement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A :

1. Calculer $P(B \cap S)$.

2. Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.

3. Les événements S et B sont-ils indépendants ?

Partie B :

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription. On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
- rien si la réponse donnée est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes :
   L =[-5 ; 5 ; 25] et G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,062 5] ?

```
def Jeu(L,G):
  n = len(L)
  E = 0
  for i in range(n):
    E =E + L[i]*G[i]
  return(E)
```

EXERCICE 8 : Probabilités

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant :
Chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer. À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

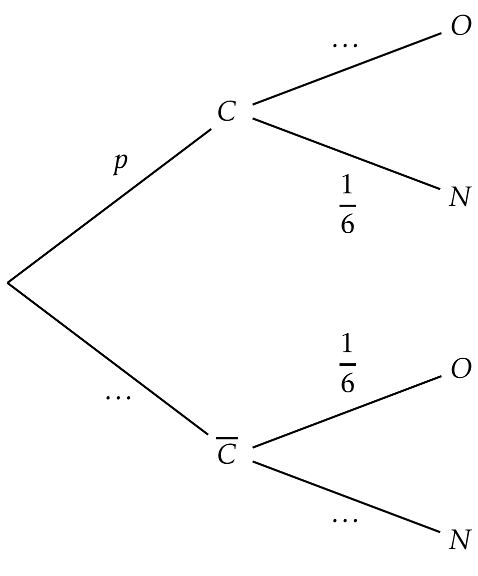
- « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
- « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
- « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

- N : l'évènement l'adolescent a répondu « non » ;
- O : l'évènement l'adolescent a répondu « oui » ;
- C : l'évènement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis ;
- $\overline{C}$: l'évènement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\dfrac{3}{5}$, soit $P(O) = \dfrac{3}{5}$.
On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.
On a donc $P(C) = p$.

1. Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\dfrac{1}{6}$.
2. On a représenté ci-dessous l'arbre de probabilités représentant la situation. Compléter l'arbre.



3. (a) Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation :

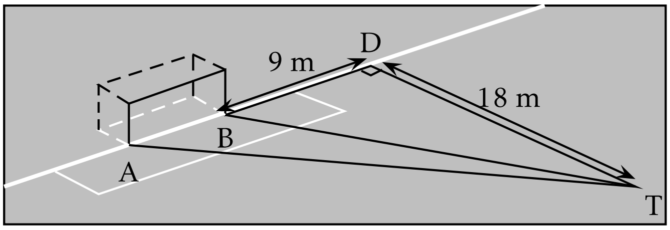
$$\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}.$$

(b) En déduire la valeur de p.

4. Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?

EXERCICE 9 : Produit scalaire

Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est de $AB = 7,32$ mètres.
Les points A, B et D sont alignés.
On appelle T le point où se trouve un ballon. Le triangle TAD est rectangle en D.



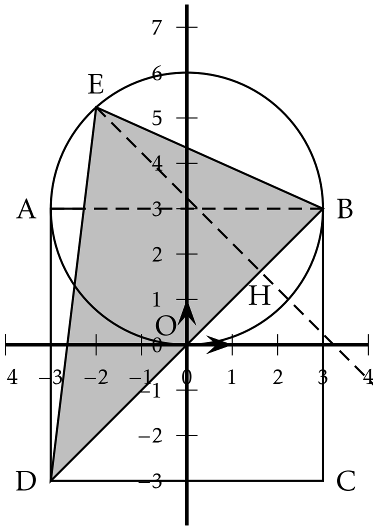
1. Pourquoi $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$?

2. Démontrer que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 470,88$.

3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir, c'est à dire de l'angle $\widehat{ATB}$.

EXERCICE 10 : Produit scalaire

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-contre dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
On donne les coordonnées des sommets du carré :
A(−3 ; 3), B(3 ; 3), C(3 ; −3),
D(−3 ; −3).
On considère le point $E\left(-2\ ;\ 3+\sqrt{5}\right)$.
On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre [AB].
On note I le milieu de [AB].



1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre [AB].

2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne

$$x + y - \left(1+\sqrt{5}\right) = 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).

4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).

5. Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 6\sqrt{5}$.
On admet que $\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \sqrt{42+12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.