EXERCICE 1 : Trinôme du second degré

1. (a) La longueur de l'enclos est x. La largeur de l'enclos est $28-2x$.
   L'aire de l'enclos est $\mathcal{A}(x) = x(28-2x) = -2x^2 + 28x$.
   (b) $\forall x \in [0;14]$, $\mathcal{A}(x) = -2(x^2 - 14x) = -2((x-7)^7 - 49) = -2(x-7)^2 + 98$.

2. Comme $a = -2$ ($a < 0$) alors la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $]-\infty;7]$ et décroissante sur $[7;+\infty[$. De plus , le sommet de la parabole qui représente la fonction $\mathcal{A}$ a pour coordonnées $(7;98)$. On en déduit que c'est la courbe $\mathcal{C}_2$ qui représente la fonction $\mathcal{A}$.

3. Comme $a < 0$, on a le tableau de variations suivant :

x	0		7		14
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	0	↗	98	↘	0

4. L'aire de l'enclos est maximale lorsque $x = 7$ m et vaut alors 98 m^2.

EXERCICE 2 : Dérivation

1. Le médicament est efficace entre 1 heure et 5 heures après administration.

2. f est dérivable sur $[0;6]$ comme somme et produit de fonctions dérivables.
   $\forall x \in [0;6]$, $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

3. T a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$ soit $y = -12(x-4) + 16$ soit $y = -12x + 64$.

4. $\forall x \in [0;6]$, $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
   Or $(x-4)^3 = (x-4)(x^2 - 8x + 16) = x^3 - 8x^2 + 16x - 4x^2 + 32x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
   Donc $\forall x \in [0;6]$, $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

5. Pour étudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f par rapport à la tangente T, on étudie le signe de $D(x) = f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$. $(x-4)^3$ est du signe de $x - 4$ et $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ est en dessous de T sur $[0;4[$, que $\mathscr{C}$ est au dessus de T sur $]4;6]$ et que $\mathscr{C}$ et T se coupent au point d'abscisse 4.

EXERCICE 3 : Dérivation

1. $f(5) = \dfrac{5^2 - 15 \times 5 + 400}{5} = 70$.
   Le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais est 7 000 euros.

2. On cherche $x \in [5;60]$ tel que :
   $f(x) = 43 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 400 = 43x \Leftrightarrow x^2 - 58x + 400 = 0$.
   Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-58)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 1764$.
   Ses racines sont $x_1 = \dfrac{58 - \sqrt{1764}}{2} = 8$ et $x_1 = \dfrac{58 + \sqrt{1764}}{2} = 50$.
   On en déduit qu'il faut fabriquer 8 ou 50 m^3 d'engrais pour avoir un coût moyen de production égal à 4 300 euros.

3. f est dérivable sur $[5;60]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $\forall x \in [5;60]$, $f'(x) = \dfrac{(2x-15)x-(x^2-15x+400)}{x^2} = \dfrac{x^2-400}{x^2} = \dfrac{(x-20)(x+20)}{x^2}$.
   $\forall x \in [5;60]$, $x+20>0$ et $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-20$.
   Or $x-20>0 \Leftrightarrow x>20$ donc on en déduit le tableau de signe et de variation suivant :

x	5		20		60
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	$\dfrac{155}{3}$

   Il faut donc fabriquer 20 m^3 d'engrais pour avoir un coût moyen de production minimal de 2 500 euros.

EXERCICE 4 : Fonction exponentielle

1. Le maximum de f sur $[0\,;3]$ est d'environ 1,4.

2. f est dérivable sur $[0;3]$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   $\forall x \in [0;3]$, $f'(x) = 4\,\mathrm{e}^{-x} + 4x(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(4-4x) = 4(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

3. $\forall x \in [0;3]$, $4\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.
   Or $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$.
   On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		1		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

4. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		3
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$12\,\mathrm{e}^{-3}$

   Le maximum de f sur $[0;3]$ est $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

5. Le coefficient directeur de (AO) est : $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{4}{\mathrm{e}} \approx 1{,}47$.
   Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(0{,}5) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 1{,}21$.
   Donc la droite (AO) a le plus grand coefficient directeur.

EXERCICE 5 : Suites

1. (a) Formule à entrer dans la cellule B3 : « =1,05*B2-12 »

(b) $0{,}2 \times 1000 = 200$ euros.
Or $u_4 \approx 1163{,}78$ et $u_5 \approx 1209{,}97$ donc Noémie doit attendre 5 ans pour que son placement lui rapporte 20 %.

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 240 = 1{,}05u_n - 12 - 240 = 1{,}05u_n - 252 = 1{,}05(v_n + 240) - 252 = 1{,}05v_n + 252 - 252 = 1{,}05v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 240 = 760$.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = 760 \times 1{,}05^n$ donc $u_n = v_n + 240 = 240 + 760 \times 1{,}05^n$

4. $u_{20} \approx 2256{,}51$.
Au bout de 20 ans, Noémie aura 2256,51 euros sur son compte.

EXERCICE 6 : Suites

1. $f_1 = f_0 + 108 = 2608$.
2608 flacons seront produits en février 2020.
$c_1 = 1{,}038 \times c_0 = 2595$.
Potentiellement, 2595 flacons seront commandés en février 2020.

2. Pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = f_n + 108$ donc (f_n) est une suite arithmétique de raison $r = 108$ et de premier terme $f_0 = 2500$.
Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}038c_n$ donc (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}038$ et de premier terme $c_0 = 2500$.

3. Pour tout entier naturel n, $f_n = 2500 + 108n$ et $c_n = 2500 \times 1{,}038^n$.

4. Algorithme :

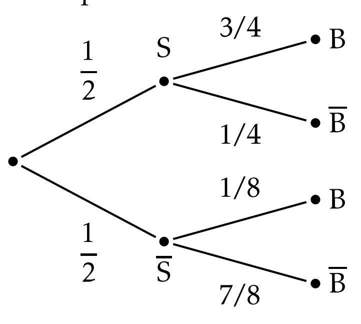
```
n = 0
f = 2 500
c = 2 500
while c<=f :
    n = n+1
    f = f+108
    c = 1,038*c
```

5. $f_0 + f_1 + \ldots + f_{11} = 12 \times \dfrac{f_0 + f_{11}}{2} = 12 \times \dfrac{2500 + 3688}{2} = 37128$.
La production globale de l'année 2020 est de 37 128 flacons.
$c_0 + c_1 + \ldots + c_{11} = c_0 \times \dfrac{1 - q^{12}}{1 - q} = 2500 \times \dfrac{1 - 1{,}038^{12}}{1 - 1{,}038} \approx 37136$.
Le nombre de commandes potentielles de l'année 2020 est 37 136. De début janvier 2020 à fin décembre 2020, la production globale sera donc inférieure au nombre de commandes potentielles.

EXERCICE 7 : Probabilités

Partie A :

On peut illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



1. $P(B \cap S) = P(S) \times P_S(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$.

2. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(B \cap S) + P(B \cap \overline{S}) = \dfrac{3}{8} + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(B) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{16}$.

3. D'une part, $P(B \cap S) = \dfrac{3}{8}$.
D'autre part, $P(B) \times P(S) = \dfrac{7}{16} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{32}$.
On a $P(B \cap S) \neq P(B) \times P(S)$ donc les événements S et B ne sont pas indépendants.

Partie B :

1. Les valeurs prises par X sont 5, 25 et -5.
$P(X = 5) = P(S \cap B) = \dfrac{3}{8}$.
$P(X = 25) = P(\overline{S} \cap B) = \dfrac{1}{16}$.
$P(X = -5) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{9}{16}$.
On peut résumer la loi de probabilité de X dans un tableau :

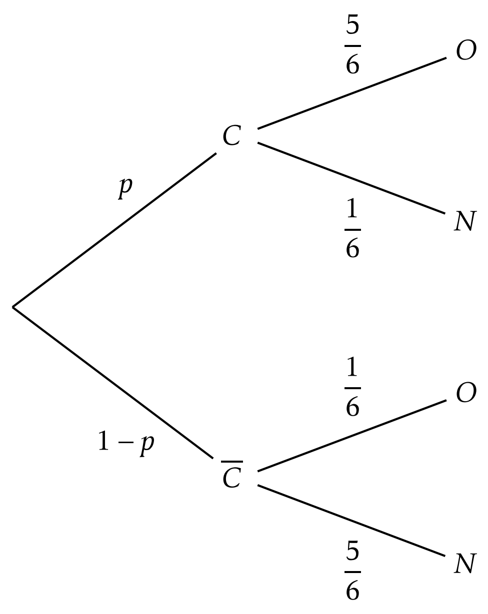
x_i	-5	5	25
$p_i = P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$	$\dfrac{3}{8} = 0{,}375$	$\dfrac{1}{16} = 0{,}0625$

2. La fonction Jeu renvoie le résultat du calcul $-5 \times 0{,}5625 + 5 \times 0{,}375 + 25 \times 0{,}0625 = 0{,}625$ ce qui correspond à l'espérance mathématiques de X.

<u>**EXERCICE 8**</u> : Probabilités

1. Pour qu'un adolescent réponde « oui » alors qu'il n'a jamais consommé de cannabis, il faut qu'il réponde « oui » sans être sincère ce qui se produit uniquement lorsque le résultat du lancer est 6 donc la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\dfrac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir un 6 lors du lancer d'un dé équilibré à 6 faces).

2. Arbre pondéré :



3. (a) C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(O) = P(C \cap O) + P\left(\overline{C} \cap O\right)$

$\Leftrightarrow P(O) = P(C) \times P_C(O) + P\left(\overline{C}\right) \times P_{\overline{C}}(O)$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{6}p + \dfrac{1}{6}(1-p)$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{1}{6}$.

(b) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}p = \dfrac{13}{30} \Leftrightarrow p = \dfrac{13}{20} = 0{,}65$.

4. $P_N(\overline{C}) = \dfrac{P(\overline{C} \cap N)}{P(N)} = \dfrac{\dfrac{7}{20} \times \dfrac{5}{6}}{1 - \dfrac{3}{5}} = \dfrac{35}{48}$.
   Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis est $\dfrac{35}{48}$.

EXERCICE 9 : Produit scalaire

1. Les droites (TD) et (DB) sont perpendiculaires donc les vecteurs $\overrightarrow{TD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux donc : $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

2. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = (\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DB})$.
   Donc $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = TD^2 + \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = TD^2 + 0 + 0 + DA \times DB$ car $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires de même sens.
   Donc $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 18^2 + 9 \times (9 + 7{,}32) = 470{,}88$.

3. $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = TA \times TB \times \cos(\widehat{ATB})$ donc $\cos(\widehat{ATB}) = \dfrac{\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}}{TA \times TB}$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DAT rectangle en D, on a :
   $TA = \sqrt{DA^2 + DT^2} = \sqrt{16{,}32^2 + 18^2} = \sqrt{590{,}3424}$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DBT rectangle en D, on a :
   $TB = \sqrt{DB^2 + DT^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} = \sqrt{405}$.
   On a alors $\cos(\widehat{ATB}) = \dfrac{470{,}88}{\sqrt{590{,}3424} \times \sqrt{405}}$ et on en déduit que $\widehat{ATB} \approx 15{,}6°$.

EXERCICE 10 : Produit scalaire

1. La droite (BD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ donc a une équation cartésienne de la forme $-6x+6y+c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   Or $B \in (BD)$ donc $-6x_B + 6y_B + c = 0 \Leftrightarrow -18 + 18 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.
   Donc (BD) a pour équation cartésienne $-6x + 6y = 0$ ou encore $x - y = 0$.
   I a pour coordonnées $(0;3)$ et $IA = 3$ donc le cercle de diamètre $[AB]$ a pour équation $x^2 + (y-3)^2 = 3^2$ c'est à dire $x^2 + y^2 - 6y = 0$.

2. On note Δ la hauteur du triangle BDE issue de E et perpendiculaire à (BD).
   $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal à Δ qui a donc une équation cartésienne de la forme $-6x - 6y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   Or $E \in \Delta$ donc $-6x_E - 6y_E + c = 0 \Leftrightarrow 12 - 18 - 6\sqrt{5} + c = 0 \Leftrightarrow c = 6 + 6\sqrt{5}$.
   Donc Δ a pour équation cartésienne $-6x - 6y + 6 + 6\sqrt{5} = 0$ ou encore $x + y - (1 + \sqrt{5}) = 0$.

3. H est le point d'intersection des droites Δ et (BD). Ses coordonnées sont donc solutions du système :
   $$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - (1+\sqrt{5}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2y - (1+\sqrt{5}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$
   Donc $H\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. L'aire du triangle BDE est $\mathscr{A} = \dfrac{EH \times BD}{2}$.

   Or $BD = \sqrt{(-3-3)^2 + (-3-3)^2} = 6\sqrt{2}$ et $EH = \sqrt{\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{15+5\sqrt{5}}$

   Donc $\mathscr{A} = 3\sqrt{30+10\sqrt{5}}$ unités d'aire.

5. $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\6+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 6 \times 1 + 6 \times (6+\sqrt{5}) = 42 + 6\sqrt{5}$.

   On a $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = DB \times DE \times \cos(\widehat{BDE})$ donc $\cos(\widehat{BDE}) = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}}{DB \times DE} = \dfrac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{42+12\sqrt{5}}}$ donc $\widehat{BDE} \approx 38°$